УДК 004.942

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ ОДНОКОВШОВОГО ПОГРУЗЧИКА

Зленко А.А., Рябикова И.М.

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), г. Москва, Российская Федерация

Рассмотрена математическая модель работы одноковшового фронтального погрузчика. Как известно, рабочий цикл погрузчика состоит из двух этапов. Первый заключается в захвате материала и его транспортировке. Второй этап – это холостой ход. Каждый из этих этапов не является детерминированным во времени, а имеет вероятностный характер, определяемый условиями работы. Исследован вариант, когда продолжительность времени первого этапа распределена по показательному закону, а второго – по нормальному. Найдена функция плотности распределения вероятностей времени рабочего цикла. Данные результаты были применены к погрузчику XCMG LW500FN. Теоретически определено время рабочего цикла, которое совпало со временем рабочего цикла погрузчика, данном в его описании.

Ключевые слова: *вероятностная модель; одноковшовый погрузчик; распределение; время рабочего цикла*

PROBABILISTIC MODEL OF SINGLE-BUCKET LOADER OPERATION

Zlenko A.A., Ryabikova I.M.

Moscow automobile and road construction state technical university (MADI), Moscow, Russian Federation

The mathematical model of single-bucket frontal loader operation is considered. As it is known, the loader working cycle consists of two stages. The *first stage consists of material capture and transportation. The second stage is idle running. Each of these stages is not deterministic in time, but has a probabilistic nature determined by the operating conditions. The variant when the duration of the first stage is distributed according to the exponential law, and the second stage is distributed according to the normal law is investigated. The probability density function of the working cycle time was found. These results were applied to the XCMG LW500FN loader. The working cycle time was theoretically determined, which coincided with the working cycle time of the loader given in its description.*

Keywords: *probabilistic model; single-bucket loader; distribution; working cycle time*

Введение

Работ, посвященных математическому моделированию различных аспектов работы дорожной техники, довольно-таки много. В статье [5] предлагается общий подход к нахождению оптимальных вероятностных значений рабочих параметров машин и механизмов. Он был применен в [3, 4] для нахождения оптимального значения веса фронтального погрузчика при различных функциях распределения вероятностей. Вес рассматривался как случайная величина, равная произведению двух других случайных величин. В [3] эти две случайные величины имеют нормальное и показательное распределение вероятностей, в [4] – нормальное.

Наша работа является продолжением этой темы. Мы рассматриваем длительность рабочего цикла машин или механизмов. Обычно, рабочий цикл состоит из двух фаз. В первой из них какое-либо устройство производит работу (например, под давлением поршень двигателя перемещается и вращает коленчатый вал или стрела автокрана несет груз). Во второй фазе, это устройство возвращается в исходное положение, это так называемый холостой ход. В некоторых случаях, исходя из анализа ситуации, можно предположить, что длительность во времени каждой из этих фаз является случайной величиной, поскольку она зависит от других случайных факторов. В этом случае длительность цикла является суммой двух случайных величин. Мы предполагаем, что нам даны функции распределения плотности вероятности длительности каждой из этих фаз, полученные опытным путём или предложенные теоретически априори.

Результаты наших исследований мы рассматриваем в приложении для одноковшового погрузчика XCMG LW500FN. Наиболее трудоёмкая часть рабочего цикла – это захват груза, а дальше этот груз переносится. Поэтому мы полагаем, что продолжительность времени первой части цикла распределена по показательному закону. А вторая часть, а именно: холостой ход, – по нормальному, как наиболее естественному закону. Исходя из этого, мы находим наиболее вероятную по времени продолжительность рабочего цикла, которую и принимаем за его продолжительность. Полученная теоретически данная величина сравнивается с продолжительностью рабочего цикла погрузчика XCMG LW500FN, данной в его описании.

Математическая формулировка проблемы и методы решения

Обозначим через X_1 случайную величину, обозначающую продолжительность во времени первой части рабочего цикла, а через X_2 – случайную величину, обозначающую продолжительность во времени второй части рабочего цикла. Продолжительность рабочего цикла Y является случайной величиной, равной сумме двух случайных величин X_1 и X_2: Место для уравнения.

$$Y = X_1 + X_2 \tag{1}$$

Исходя из смысла задачи, мы предполагаем, что X_1 и X_2 – независимые случайные величины и известны их функции плотности распределения вероятностей $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ соответственно. Формула свёртки этих функций дает функцию плотности распределения $f(y)$ случайной величины Y:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1)\, dx_1. \tag{2}$$

В нашем исследовании случайные величины X_1 и X_2 имеют функции распределения экспоненциальную и нормальную соответственно:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 0,\ x_1 \le c, 0,\ x_1 \le c, \\ \lambda e^{-\lambda(x_1 - c)},\ x_1 > c \end{cases} \tag{3}$$

$$f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4)$$

Но есть некоторые трудности в применении этих формул. Случайные величины X_1 и X_2 заданы на конечных интервалах $(c_1; d_1)$и $(c_2; d_2)$ соответственно, а в формуле (2) они заданы на бесконечных интервалах. Нам следует выбрать параметры их распределений таким образом, чтобы более 90 процентов вероятности находилось в каждом из этих конечных интервалов. Рассмотрим выбор этих параметров.

Функция нормального распределения $f_2(x_2)$ должна быть симметричной в интервале $(c_2; d_2)$. Это нам даёт возможность определить математическое ожидание a:

$$a = ((c_2 + d_2)/2. \quad (5)$$

Мы применим правило 3σ для нахождения среднего квадратического отклонения σ. В интервале $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$ лежит 99.7% вероятности. Исходя из этого найдём σ:

$$3\sigma = (c_2 + d_2)/2 - c_2 = d_2 - (c_2 + d_2)/2,$$

$$\sigma = (d_2 - c_2)/6. \quad (6)$$

Теперь определим параметр λ распределения (3). Мы его найдём из того же самого условия, что не менее 99.7% вероятности должно лежать в интервале $(c_1; d_1)$. Отсюда следует, что

$$\int_{c_1}^{d_1} f_1(x_1)dx_1 = P(c_1 \le X_1 \le d_1) > 0.997$$

или

$$1 - e^{-\lambda(d_1-c_1)} > 0.997.$$

Решая это неравенство, получаем интервал изменения λ:

$$\frac{5.809}{d_1-c_1} < \lambda.$$

Можно взять, например,

$$\lambda = \frac{6}{d_1-c_1}. \quad (7)$$

Параметр c этого распределения, очевидно, равен c_1.

Займёмся вычислением функции плотности распределения $f(y)$ случайной величины Y (1):

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1)\, dx_1 =$$

$$= \int_{c}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(x_1 - c)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - x_1 - a)^2}{2\sigma^2}} dx_1 =$$

$$= \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} e^{-\lambda(x_1 - c)\ -\frac{(y - x_1 - a)^2}{2\sigma^2}} dx_1 \qquad (8)$$

Рассмотрим отдельно выражение в показателе экспоненты под знаком интеграла (8) и преобразуем его, выделив полный квадрат с x_1:

$$-\lambda(x_1 - c) - \frac{(y - x_1 - a)^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}[-2\lambda\sigma^2 x_1 + 2\sigma^2\lambda c - y^2 - {x_1}^2 - a^2 + 2yx_1 + 2ay - 2ax_1] =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}[-{x_1}^2 + 2(y - a - \lambda\sigma^2)x_1 - (y - a - \lambda\sigma^2)^2 + (y - a - \lambda\sigma^2)^2 +$$

$$+2\lambda\sigma^2 c - y^2 + 2ay - a^2] =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}[-(x_1 - (y - a - \lambda\sigma^2))^2 + (y - a)^2 - 2(y - a)\lambda\sigma^2 +$$

$$+\lambda^2\sigma^4 + 2\lambda\sigma^2 c - (y - a)^2] =$$

$$= -\frac{(x_1 - (y - a - \lambda\sigma^2))^2}{2\sigma^2} - \lambda\left(y - a - c - \frac{\lambda\sigma^2}{2}\right). \qquad (9)$$

Принимая во внимание выражения (8) и (9), $f(y)$ примет вид:

$$f(y) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\ \lambda\left(y - a - c - \frac{\lambda\sigma^2}{2}\right)} \int_c^{+\infty} e^{-\frac{(x_1 - (y - a - \lambda\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dx_1 =$$

$$= \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda(y-v)} \int_{c}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-u)^2}{2\sigma^2}} dx_1 \,, \tag{10}$$

где

$$v = a + c + \frac{\lambda\sigma^2}{2},\ u = y - a - \lambda\sigma^2. \tag{11}$$

Сделаем замену переменных:

$$\frac{x_1 - u}{\sigma} = w, \qquad x_1 = \sigma w + u, \qquad dx_1 = \sigma dw.$$

Если $x_1 = c$, тогда $w = \frac{c-u}{\sigma} = \frac{c+a+\lambda\sigma^2-y}{\sigma} = -\frac{y-c-a-\lambda\sigma^2}{\sigma} = -\frac{y-p}{\sigma}$, где

$$p = v + \frac{\lambda\sigma^2}{2}. \tag{12}$$

Если $x_1 \to +\infty$, тогда $\omega \to +\infty$.

С учётом этой замены преобразуем $f(y)$ (10):

$$f(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda(y-v)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c-u}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw =$$

$$= \lambda e^{-\lambda(y-v)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c-u}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{w^2}{2}} dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \right) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda(y-v)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{u-c}{\sigma}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \right) = \lambda e^{-\lambda(y-v)} \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{y-p}{\sigma}\right) \right),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \text{ – функция Лапласа.} \tag{13}$$

Итак, получена функция плотности распределения вероятностей $f(y)$ продолжительности рабочего цикла:

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda(y-v)} \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{y-p}{\sigma}\right) \right). \tag{14}$$

Мода этого распределения является наиболее вероятным значением аргумента y. Именно моду мы и берём за продолжительность рабочего цикла. Она может быть вычислена в выражении (14) численно или графически.

Приложение полученных результатов к фронтальному погрузчику XCMG LW500FN

В [1] дана формула продолжительности по времени рабочего цикла t_c фронтального погрузчика:

$$t_c = \frac{k_1 \cdot q \cdot k_2}{M \cdot g \cdot v} + \frac{M \cdot g \cdot l \cdot k_3}{N}, \tag{15}$$

где

$k_1 = 120000 \div 300000$ –удельное сопротивление захвата материала ковшом погрузчика, Н/м^2 [1];

$q = 3$ – вместимость ковша погрузчика, м^3 [2];

$k_2 = 7$ – безразмерный коэффициент, учитывающий увеличение времени на операции захвата материала и перемещение [1];

$M = 16500$ – масса погрузчика, кг [2];

g = 9.8 – ускорение силы земного тяготения, м/с^2;

υ = 3 – средняя скорость погрузчика при выполнении технологических операций, м/с [2];

$l = 10 \div 20$ – холостой ход погрузчика, м [1];

k_3 – 0.36 – безразмерный коэффициент, учитывающий влияние тягово-сцепных характеристик движителя [1];

N – 162 – мощность погрузчика, кВт [2]).

Как мы видим, формула продолжительности рабочего цикла (15) состоит из двух слагаемых. Учитывая вышеприведённые данные погрузчика, найдём значения всех необходимых параметров. Интервал изменения первого слагаемого (c_1; d_1) где

$$c_1 = 5.2 \text{ с}, \quad d_1 = 13 \text{ с}. \tag{16}$$

Следовательно, случайная величина X_1 принимает значения в интервале (5.2 с; 13 с). Её распределение имеет показательный закон (3). Определим параметр λ по формуле (7), а параметр c равен c_1:

$$\lambda = 1, \quad c = 5.2 \text{ с}. \tag{17}$$

Случайная величина X_2 определяется вторым слагаемым в выражении (15), распределена по нормальному закону (4) и имеет интервал изменения (c_2; d_2):

$$c_2 = 3.6 \text{ с}, \quad d_2 = 7.2 \text{ с}. \tag{18}$$

Значения величин a and σ вычисляются по формулам (5) и (6) соответственно:

$$a = 5.4 \text{ с}, \quad \sigma = 0.6 \text{ с}. \tag{19}$$

Зная параметры (17), (19) распределений X_1 и X_2, мы можем вычислить величины v (11) and p (12) распределения Y (14):

$$v = a + c + \frac{\lambda\sigma^2}{2} = 10.78, \quad p = v + \frac{\lambda\sigma^2}{2} = 10.96. \tag{20}$$

Тогда плотность распределения вероятностей продолжительности рабочего цикла фронтального погрузчика имеет вид:

$$f(y) = e^{-(y-10.78)}\left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{y-10.96}{0.6}\right)\right). \tag{21}$$

График функции $f(y)$ представлен на рисунке 1. Значения аргумента y даны в секундах.

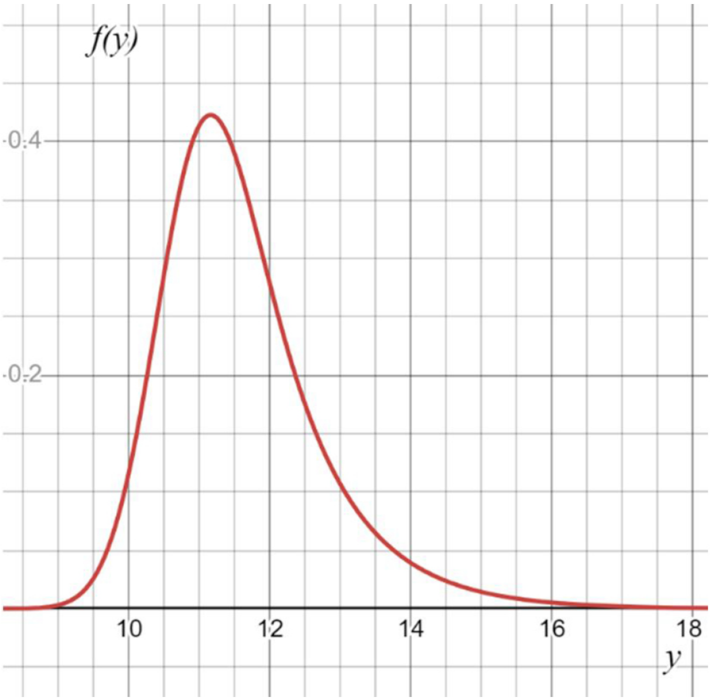

Рис. 1. График функции $f(y)$

На рис. 1 видно, что почти вся вероятность лежит в интервале 8.5 с $\leq y \leq$17 с. Мода этого распределения равна 11.15 с. При таком значении аргумента функция распределения $f(y)$ имеет экстремальный локальный максимум, равный 0.42. Поэтому мы принимаем 11.15 с в качестве общего времени цикла, обосновывая это тем, что это наиболее вероятное значение.

Заключение

Итак, мы нашли функцию плотности распределения вероятностей общего времени рабочего цикла, используя показательное распределение вероятностей для времени захвата и перемещения груза и нормальное распределение для времени холостого хода. При этом нам пришлось подобрать такие параметры этих распределений, чтобы в конечные интервалы времени каждой из двух частей цикла попало более 99.7% вероятности. Для получения функции плотности распределения суммы двух случайных независимых величин была применена формула свёртки и проделаны громоздкие преобразования.

Эти результаты были применены для одноковшового фронтального погрузчика XCMG LW500FN. Продолжительность рабочего цикла составила 11.15 с. А в его описании [2] она составляет 11 с. Поразительное совпадение теории и практики! Но на этом останавливаться нельзя. Дальнейшее продвижение исследований видится в том, чтобы провести натурные статистические испытания погрузчика и выяснить реальные функции плотности распределений при различных режимах работы погрузчика. В дальнейшем эти теоретические разработки могут быть использованы для создания более совершенных погрузчиков.

Список литературы

1. Баловнев В.И. Определение параметров и выбор землеройных машин. М.: Полиграф, 2010. 223с.
2. XCMG - ООО «СТРОЙТЕХИМПОРТ». Каталог. https://xcmg.ru/product/
3. Зленко А.А., Рябикова И.М. Вероятностная модель определения массы ковшового погрузчика // Наука и техника в дорожной отрасли. 2007. № 3 (42). С. 41–42.

4. Зленко А.А., Рябикова И.М. Определение оптимальной полной массы погрузчика // Наука и техника в дорожной отрасли. 2008. № 3 (46). С. 42–44.
5. Зленко А.А. Нахождение оптимальных вероятностных значений некоторых рабочих параметров машин и механизмов // Наука и техника в дорожной отрасли. 2009. № 1 (48). С. 37–38.

References

1. Balovnev V.I. *Determination of parameters and selection of earthmoving machines*. Moscow: Polygraph, 2010. 223 p.
2. XCMG - OOO “STROYTECHIMPORT”. Catalog. https://xcmg.ru/product/
3. Zlenko A.A., Ryabikova I.M. Probabilistic model of the bucket loader mass determination. *Science and technology in the road industry*. 2007. № 3 (42). P. 41-42.
4. Zlenko A.A., Ryabikova I.M. Determination of the optimal total mass of the loader. *Science and technology in the road industry*. 2008. № 3 (46). P. 42-44.
5. Zlenko, A.A. Finding the optimal probabilistic values of some working parameters of machines and mechanisms. *Science and technology in the road industry*. 2009. № 1 (48). P. 37-38.