

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

Зленко А.А.¹, Бездольный Г.Р.

¹<https://orcid.org/0000-0002-7177-2978>

Московский автомобильно-дорожный государственный технический
университет (МАДИ), Москва, Российская Федерация

Аннотация

Уравнение Кеплера служит для нахождения положения тела на орбите. Оно является трансцендентным и для его решения используются как численные, так и аналитические методы. В этой работе решения уравнения путём разложения в ряд Фурье, методом простых итераций, методом Ньютона сравниваются с решением, даваемым гиперфункцией Ламбера. Показано, что наиболее быстрым по времени является метод Ньютона, а наиболее медленным – решение с помощью ряда Фурье.

Ключевые слова: уравнение Кеплера; ряд Фурье; метод Ньютона; метод простых итераций

NUMERICAL ANALYSIS OF METHODS FOR SOLVING THE KEPLER EQUATION

Zlenko A.A.¹, Bezdolny G.R.

¹<https://orcid.org/0000-0002-7177-2978>

Moscow automobile and road construction state technical university (MADI),
Moscow, Russian Federation

Abstract

The Kepler equation is used to find the position of a body in orbit. It is transcendental and both numerical and analytical methods are used to solve it. In this paper, the solutions of the equation by Fourier series expansion, simple iteration method, and Newton's method are compared with the solution given by the Lambert hyperfunction. It is shown that the fastest in time is Newton's method and the slowest is the Fourier series solution.

Keywords: Kepler equation; Fourier series; Newton's method; simple iteration method

Введение

Уравнение Кеплера [3], устанавливая связь между средней аномалией и эксцентрической аномалией, служит для описания движения по эллиптическим орбитам в задаче двух тел. Высокая точность решения уравнения Кеплера – необходимое условие для его применения. Но в силу его трансцендентности и нелинейности возникает потребность в поиске эффективных численных и численно-аналитических методов его решения. Обзор существующих методов решения и история их возникновения освещены в [4]. Тем не менее, актуальным является исследование и получение более точных численных решений [1]. Новым аналитическим методом является применение гиперфункции Ламберта [2, 6, 7]. В данной работе этот метод решения уравнения Кеплера анализируется и сравнивается с традиционными, такими как метод касательных Ньютона, метод простых итераций, разложение в ряд Фурье по функциям Бесселя.

Решение уравнения Кеплера с помощью гиперфункции Ламберта

Проблему, связанную с функцией, обратной к комплексной функции $y = ze^z$, рассматривал Иоганн Ламберт в 1758 году. В качестве самостоятельной функции она была введена в системе компьютерной алгебры Maple, где получила обозначение LambertW [5]. Обобщением функции Ламберта является гиперфункция Ламберта HW , введенная в работах Galidakis [6, 7]. Она применена к решению трансцендентного уравнения Кеплера

$$E - \varepsilon \sin E = M, \quad (1)$$

где E – эксцентрическая аномалия тела, движущегося по эллиптической орбите, ε – эксцентричеситет орбиты, M – средняя аномалия. Решение имеет вид [2, 7]:

$$E = HW \left(\left\{ \ln \left(1 - \frac{\varepsilon}{E} \sin E \right) \right\}; M \right) \quad (2)$$

Для вычисления значений гиперфункции Ламберта мы применим алгоритм, данный в работе [7]. Опишем этот алгоритм.

1. Использование обратной функции. Определим обратную функцию $U(E; M)$ для гиперфункции (2):

$$U(E; M) = Ee^{\ln(1 - \frac{\varepsilon \sin E}{E})} - M = E - \varepsilon \sin E - M = 0. \quad (3)$$

2. Разложение в полином Тейлора. Нужно разложить функцию U в ряд Тейлора. Берутся первые $(n+1)$ членов ряда, которые дают полином Тейлора:

$$U_n(E) = \sum_{k=0}^n \frac{U^{(k)}(0)}{k!} E^k, \quad (4)$$

где $U^{(k)}(0)$ – это k -я производная функции U , вычисленная в точке $E = 0$.

3. Численное решение полинома Тейлора. Находятся n корней полинома $U_n(E)$.

Среди них существует действительный корень E_0 тот, для которого $U_n(E_0)$ ближе всего к нулю.

4. Использование метода Ньютона для дальнейшего улучшения точности найденного корня E_0 . Начальным приближением является либо E_0 , либо можно взять то, которое указано в работе [1].

Другие алгоритмы решения уравнения Кеплера

1. Разложение в ряд Фурье по функциям Бесселя. В работе [3] даётся вывод представления E в виде ряда Фурье по функциям Бесселя:

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(k\varepsilon)}{k} \sin kM, J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n}. \quad (5)$$

Полученный ряд Фурье абсолютно и равномерно сходится для всех действительных значений средней аномалии и при значениях эксцентриситета

$0 < \varepsilon < L$, где $L = 0.6627434196\dots$ – предел Лапласа [3].

2. Метод Ньютона. Итеративный процесс имеет вид:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{U(E_n; M)}{U'(E_n; M)} = E_n - \frac{E_n - \varepsilon \sin E_n - M}{1 - \varepsilon \cos E_n}, \quad (6)$$

где $U'(E_n; M)$ – производная функции $U(E; M)$ (3) по E в точке $E = E_n$. Эта итерация повторяется до тех пор, пока не будет получена желаемая точность δ :

$$|E_n - \varepsilon \sin E_n - M| < \delta. \quad (7)$$

3. *Метод простых итераций.* Последовательность, заданная рекуррентным соотношением

$$E_{n+1} = \varepsilon \sin E_n + M. \quad (8)$$

сходится к корню уравнения Кеплера E^* , если эксцентриситет меньше единицы. В качестве начального приближения берётся корень полинома (4) E_0 . При этом для оценки точности используется формула (7).

Вычисления и сравнение полученных решений

Для проведения сравнительного анализа методов решения уравнения Кеплера, таких как ряд Фурье, метод Ньютона, метод простых итераций, метод с использованием гиперфункции Ламберта было разработано специализированное программное обеспечение на языке Python. Вычисления проводились с использованием процессора AMD Ryzen 5 5500 4.2 ГГц. В каждом из методов вычислялось значение эксцентрической аномалии E для 100 значений средней аномалии M , равномерно распределенных в интервале от 0 до 2π , и при различных значениях эксцентриситета ε (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 и 0.99) и различной точностью вычислений.

Методом с использованием ряда Фурье с float числами были вычислены значения для n членов ряда, где n от 1 до 65. Из табл. 1 видно, что средняя точность вычисления E растет медленнее, чем время выполнения. Для реализации с float максимальным стабильным n оказалось 65. Это связано с тем, что при вычислении функций Бесселя выполняется возведение в степень n^2 и поэтому происходит переполнение числа с плавающей точкой float.

Таблица 1.
Количество членов ряда, среднее время, средняя точность вычисления E для ряда Фурье с использованием чисел float

Ко-во членов ряда	Среднее время счёта, с.	Средняя точность, рад.	Кол-во членов ряда	Среднее время счёта, с.	Средняя точность, рад.
3	0.0000077	2×10^{-2}	20	1×10^{-3}	3.3×10^{-2}
7	0.0000233	7×10^{-3}	35	6×10^{-4}	1.6×10^{-2}
10	0.0000477	4×10^{-3}	50	4×10^{-4}	1.4×10^{-2}
15	0.0001411	2×10^{-3}	65	2×10^{-4}	7.9×10^{-3}

Для реализации с типом числа с заданной точностью n было от 1 до 100.

Реализация этого метода для этого типа числа для 100 членов ряда показала следующие результаты: среднее время 4.978486 с., средняя точность 0.000196 рад. Очевидно, что данный метод при таких больших значениях n неэффективен. На рис. 1 показана зависимость точности от M для $\epsilon = 0.99$. А на рис. 2 показана зависимость средней точности вычисления E от эксцентризитета ϵ : она падает при увеличении ϵ . Действительно, для малых значений эксцентризитета данный метод может находить E с большой точностью, например, для $\epsilon = 0.2$ среднее время выполнения 0.00016 с., а точность 10^{-12} . Таким образом, данный метод можно рассматривать для использования в вычислительных задачах с маленьким эксцентризитетом.

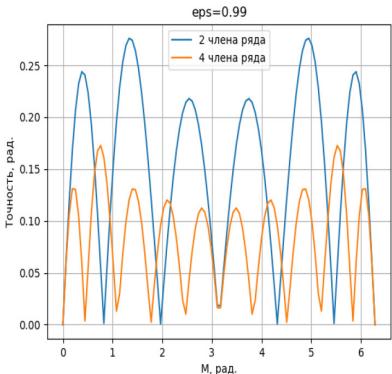


Рис. 1

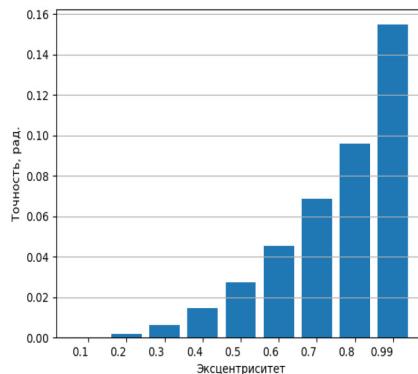


Рис. 2

Метод простых итераций был проверен для точности от 10^{-2} до 10^{-20} и для различного количества итераций: 100, 1000, 10000, 100000, 1000000. Анализируя табл. 2, можно сделать вывод о том, что данный метод показывает намного более высокую точность вычисления E за то же время, в сравнении с прошлым методом. Как и у предыдущего метода при увеличении ϵ падает точность (рис. 3), но в методе простых итераций точность зависит также не только от эксцентризитета, но и от M : на рис. 4 видно, что точность падает

и возрастает при приближении к π . Тем не менее, метод имеет высокую эффективность для точности 10^{-16} (табл. 2).

Таблица 2.

Среднее время, средняя точность и минимальная точность вычисления E для метода простых итераций

Кол-во итераций	Среднее время, с.	Средняя точность, рад.	Минимальная точность, рад.
10	0.000004	9×10^{-3}	2.9×10^{-1}
100	0.000006	4×10^{-4}	4.0×10^{-2}
1000	0.000109	6×10^{-9}	1.2×10^{-6}
10000	0.001108	1×10^{-16}	3.8×10^{-14}
100000	0.011	1×10^{-16}	3.8×10^{-14}
1000000	0.1067	1×10^{-16}	3.8×10^{-14}

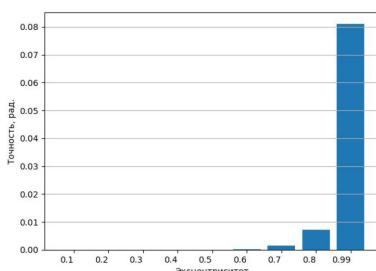


Рис. 3

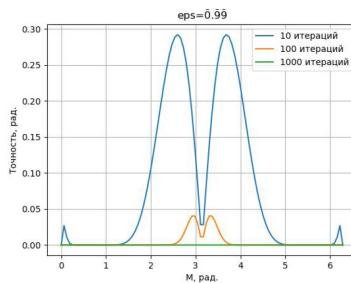


Рис. 4

Метод Ньютона выполнялся до достижения разных значений точности (табл. 3). Он оказался самым быстрым для любых значений точности. Анализируя рис. 5 (числа 25 и 30 означают точность 10^{-25} и 10^{-30}) можно заметить, что для больших значений эксцентризитета ϵ эксцентрическая аномалия E вычисляется медленнее, чем для маленьких. Но скорость вычисления практически не зависит от M . Дополнительно, для метода Ньютона и метода с использованием гиперфункции Ламберта были проверены более высокие уровни точности: 10^{-17} , 10^{-20} , 10^{-25} радиан.

Тщательный анализ применения метода Ньютона для получения решение уравнения Кеплера с машинной точностью дан в [1].

Таблица 3.
Среднее время счёта E для разной точности в методе Ньютона
и с использованием функции Ламберта

Точность рад.	Среднее время счёта для метода Ньютона, с.	Среднее время счёта для гиперфункции Ламберта, с.	Точность рад.	Среднее время счёта для метода Ньютона, с.	Среднее время счёта для гиперфункции Ламберта, с.
10^{-3}	0.000008	0.032523	10^{-14}	0.000080	0.035379
10^{-4}	0.000004	0.032866	10^{-17}	0.011300	0.040174
10^{-5}	0.000008	0.033539	10^{-20}	0.010871	0.040319
10^{-8}	0.000004	0.034705	10^{-25}	0.012521	0.041354
10^{-10}	0.000013	0.034973	10^{-30}	0.014000	0.041444
10^{-12}	0.000013	0.035072	10^{-50}	0.014408	0.048196

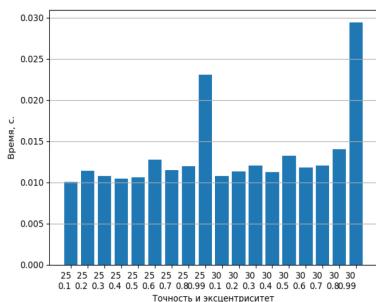


Рис. 5

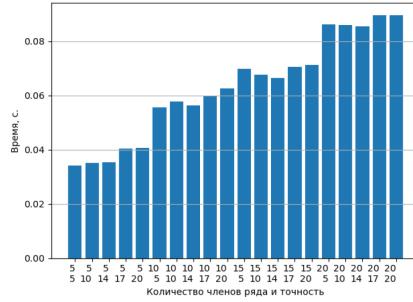


Рис. 6

При тесте метода, основанного на вычислении гиперфункции Ламберта, для ряда Тейлора n было от 2 до 100, максимальное количество итераций у метода Ньютона было 100000, а точность задавалась от 10^{-2} до 10^{-50} рад. На рис. 6 видно (числа 5, 10, 15, 20 в первой строке под рисунком означают число членов ряда Тейлора, а ниже числа 5, 10, 17, 20 означают точность $10^{-5}, \dots, 10^{-20}$ рад. соответственно), что при увеличении числа членов ряда Тейлора среднее время вычисления E для одной и той же точности увеличивается. Средняя время практически не зависит от значения эксцентризитета ϵ .

Заключение

Анализируя все методы, можно сделать вывод о том, что использование гиперфункции Ламберта для решения уравнения Кеплера не

является эффективным подходом. Такой численно-аналитический метод эффективнее метода с использованием ряда Фурье. Последний имеет меньшую точность при одинаковых временных затратах. Но метод с гиперфункцией Ламберта проигрывает численным методам Ньютона и простых итераций. Это можно объяснить тем, что для построения и нахождения корней полинома Тейлора тратится большое количество вычислительных ресурсов как при нахождении производных, так и при нахождении корней полинома Тейлора. Также в используемой библиотеке SymPy даже для вычислений с маленькой точностью используются числовые типы данных, которые менее эффективны, чем числа с плавающей точкой.

Список литературы

1. Абубекеров М. К. Решение уравнения Кеплера с машинной точностью / М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев // Астрономический журнал. 2020. Т. 97, № 12. С. 1022-1029. <https://doi.org/10.31857/S0004629920120014>
2. Дубинов А. Е. Явное решение уравнения Кеплера / Дубинов А.Е., Галидакис И.Н. // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т.4, №3(139). С. 365-370.
3. Дубошин Г. Н. Небесная Механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1986.
4. Colwell P. Solving Kepler's Equation over Three Centuries. Richmond: Willmann-Bell Inc., 1993.
5. Corless R. M. et al. On the Lambert W Function // Adv. Comp. Math. 1996. Vol. 5. P. 329-359.
6. Galidakis I. N. On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f(p)(z) = z$ // Complex Variables. 2005. Vol. 50, No. 13. P. 977-997.
7. Galidakis I. N. On some applications of the generalized hyper-Lambert functions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007. Vol. 52(12). P. 1101–1119. <https://doi.org/10.1080/17476930701589563>

References

1. Abubekerov, M. K. Solution of the Kepler equation with machine accuracy / M. K. Abubekerov, N. Yu. Gostev // Astronomical Journal. 2020. Vol. 97, № 12. P. 1022-1029. <https://doi.org/10.31857/S0004629920120014>

2. Dubinov, A.E. Explicit solution of the Kepler equation / Dubinov, A.E.; Galidakis, I.N. // Letters in ECHAYA. 2007. Vol. 4, №3(139). P. 365-370.
3. Duboshin G. N. Celestial Mechanics. Basic Problems and Methods. Moscow: Nauka, 1986.
4. Colwell P. Solving Kepler's Equation over Three Centuries. Richmond: Willmann-Bell Inc., 1993.
5. Corless R. M. et al. On the Lambert W Function // Adv. Comp. Math. 1996. Vol. 5. P. 329-359.
6. Galidakis I. N. On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f(p)(z) = z$ // Complex Variables. 2005. Vol. 50, No. 13. P. 977-997.
7. Galidakis I. N. On some applications of the generalized hyper-Lambert functions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007. Vol. 52(12). P. 1101–1119. <https://doi.org/10.1080/17476930701589563>