

ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ

Зленко А.А.

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается влияние вязкости на форму вязкоупругих небесных тел на примере движения двух однородных тел, планеты и её спутника, вокруг притягивающего центра. Анализируется структура перемещений точек тела под действием гравитационных сил. Найдены канонические уравнения поверхностей упругих, вязких и вязкоупругих тел и их ориентация в соответствующих системах координат.

Ключевые слова: *вязкоупругие; упругие деформации; перемещение; форма тела; трёхосный эллипсоид*

FORM OF SURFACE OF VISCOELASTIC CELESTIAL BODIES UNDER THE ACTION OF GRAVITATIONAL FORCES

Zlenko A.A.

Moscow automobile and road construction state technical university
(MADI), Moscow, Russian Federation

The effect of viscosity on the shape of viscoelastic celestial bodies is considered by the example of the motion of two homogeneous bodies, a planet and its satellite, about an attracting center. It is analyzed the structure of displacements of body's points under the action of gravitational forces. The canonical equations of the surfaces of the elastic, viscous and viscoelastic bodies and their orientation are found in corresponding coordinate frames.

Keywords: *viscoelastic; elastic deformations; displacements; shape of the body; tri-axial ellipsoid*

Введение

Влияние вязкости на форму вязкоупругих небесных тел является не до конца изученной проблемой. Во-первых, это представляет теоретический интерес, во-вторых, уточняет форму небесных тел и, в третьих, знание формы тел важно для вычисления их гравитационного потенциала, моментов инерции, моментов сил и всех характеристик движения.

Мы исследуем эту проблему на примере движения планеты и ее спутника вокруг притягивающего центра. Масса первого тела (планеты) значительно превосходит массу второго тела (спутника), сумма их масс во много раз меньше массы притягивающего центра. В реальности – это модель системы Земля-Луна-Солнце. Решение этой задачи, ввиду соотношения масс тел, основано на асимптотическом методе теории возмущений с использованием теории малых деформаций и модели Кельвина-Фойхта. В невозмущенном случае тела – шары, движение барицентра тел вокруг притягивающего центра и спутника вокруг планеты является круговым, а тела вращаются вокруг их центров масс с постоянными угловыми скоростями. Возмущающим фактором является вязкоупругость тел и, как следствие, изменение их формы влечет за собой изменение их гравитационного потенциала. Тела начинают двигаться по квазикруговым орбитам, их угловые скорости меняются со временем. Эволюция в движении тел обусловлена именно их вязкостью [3].

Ранее [4] нами были получены перемещения точек небесных тел, вызванные вязкоупругой деформацией. В силу линейности теории они представлены в виде суммы двух слагаемых: первое вызвано действием только упругих сил, а второе – диссипативных сил. Эти перемещения обратно пропорциональны модулю Юнга и третьей степени расстояния до притягивающего тела. Вязкие перемещения по величине в несколько раз меньше упругих перемещений. Все перемещения даны во вращающейся системе координат, жестко связанной с телом. В работе [5] мы исследовали деформированное состояние этих тел.

Целью нашей работы является определение формы поверхности небесного тела, когда оно является упругим, вязким или вяз-

коупругим под действием гравитационной силы другого тела или массивного притягивающего центра.

1. Форма поверхности упругого тела

Мы можем представить перемещения \mathbf{u}_{ik1} (1) вязкоупругого тела в таком виде:

$$\mathbf{u}_{ik1} = \mathbf{u}_{ik12} + \mathbf{u}_{ik13}, \tag{1}$$

где \mathbf{u}_{ik12} (2) и \mathbf{u}_{ik13} (13) – упругие и вязкие, соответственно, перемещения точек i -го тела, вызванные k -ым телом, рассматриваемым как материальная точка [4]. Мы не берём во внимание перемещения, обусловленные центробежными силами благодаря вращению тела, так как они не влияют на его эволюцию. Нижний индекс i ($i = 1, 2$) означает величины, отнесённые к i -ому телу с массой m_i . Нижний индекс $k=1$ denotes O – массивную материальную точку с массой M , $k=2$ – другое тело. Перемещения даны в системе координат $O_i X_i Y_i Z_i$, неподвижной во вращающемся теле с центром масс O_i .

$$\mathbf{u}_{ik12}(\mathbf{r}_i, \psi_{ki}(t)) = 3\rho_i E_i^{-1} f_{ki} R_k^{-3} \left[a_{i1} (\mathbf{B}_{ki}(\psi_{ki}(t)) \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i + (a_{i2} \mathbf{r}_i^2 + a_{i3} r_{i0}^2) \mathbf{B}_{ki}(\psi_{ki}(t)) \mathbf{r}_i \right], \tag{2}$$
 где ρ_i – плотность, E_i – модуль Юнга, $f_{i1} = f = GM$, $f_{2i} = Gm_{3-i}$, G – универсальная гравитационная постоянная, R_1 – расстояние между центром масс массивного тела O и барицентром C двух тел, R_2 – расстояние между точками O_1 и O_{22} .

$$a_{i1} = (1 + \nu_i) / (5\nu_i + 7), a_{i2} = -a_{i1} (2 + \nu_i), a_{i3} = a_{i1} (2\nu_i + 3), \tag{3}$$

$$\mathbf{B}_{ki}(\psi_{ki}(t)) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \cos 2\psi_{ki}(t) + 1 & 3 \sin 2\psi_{ki}(t) & 0 \\ 3 \sin 2\psi_{ki}(t) & -3 \cos 2\psi_{ki}(t) + 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ (T – символ транспозиции) – радиус-вектор точек тела (недеформированного шара радиуса r_{i0}) с координатами (x_i, y_i, z_i) в системе $O_i X_i Y_i Z_i$. Плоскость $O_i X_i Y_i$ лежит в плоскости движения тел. ν_i – коэффициент Пуассона, $\psi_{ki}(t)$ – угол между осями $O_i X_i$ и $O_i X_{ik}$, измеряемый от оси $O_i X_i$, t – время. Ось $O_i X_{ik}$ направлена к центру масс k -го притягивающего тела. Система координат $O_i X_{ik} Y_{ik} Z_{ik}$ образована вращением системы $O_i X_i Y_i Z_i$ вокруг оси $O_i Z_i$ на угол $\psi_{ki}(t)$.

Упругие перемещения (2) являются нестационарными. Для того, чтобы определить форму i -го упругого тела, вызванного при-

тяжением k -го тела, перейдём к системе координат $O_i X_{ik} Y_{ik} Z_{ik}$. Преобразование координат $\mathbf{r}_{ik} = (x_{ik}, y_{ik}, z_{ik})^T$ от системы $O_i X_{ik} Y_{ik} Z_{ik}$ к координатам $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ в системе $O_i X_i Y_i Z_i$ даётся формулами (5):

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}_{ik}(\psi_{ik}) \mathbf{r}_{ik} = \mathbf{\Gamma}_{ik}(\psi_{ik}) \begin{pmatrix} x_{ik} \\ y_{ik} \\ z_{ik} \end{pmatrix}, \mathbf{\Gamma}_{ik}(\psi_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos \psi_{ik} & -\sin \psi_{ik} & 0 \\ \sin \psi_{ik} & \cos \psi_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

Преобразование упругих перемещений имеет вид (6):

$$\mathbf{u}_{ik12}(\mathbf{r}_{ik}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ike} \\ \mathbf{v}_{ike} \\ \mathbf{w}_{ike} \end{pmatrix} = (\mathbf{\Gamma}_{ik}(\psi_{ik}))^{-1} \mathbf{u}_{ik12}(\mathbf{\Gamma}_{ik}(\psi_{ik}) \mathbf{r}_{ik}, \psi_{ki}(t)) = \quad (6)$$

$$\beta_{ik} \left[a_{i1} (2x_{ik}^2 - y_{ik}^2 - z_{ik}^2) + (a_{i2} r_{ik}^2 + a_{i3} r_{i0}^2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \mathbf{r}_{ik}, \quad \beta_{ik} = \rho_i E_i^{-1} f_{ki} R_k^{-3}$$

Произвольная точка недеформированного тела, определяемого вектором \mathbf{r}_i , переходит в вектор \mathbf{r}_{ike} (7) в системе $O_i X_{ik} Y_{ik} Z_{ik}$ в силу упругих деформаций:

$$\mathbf{r}_{ike} = \begin{pmatrix} x_{ike} \\ y_{ike} \\ z_{ike} \end{pmatrix} = \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{u}_{ik12}(\mathbf{r}_{ik}) = \begin{pmatrix} x_{ik} \\ y_{ik} \\ z_{ik} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ike} \\ \mathbf{v}_{ike} \\ \mathbf{w}_{ike} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_{ik} \left\{ 1 + \hat{a}_{ik} \left[a_{i1} (2x_{ik}^2 - y_{ik}^2 - z_{ik}^2) + 2(a_{i2} r_{ik}^2 + a_{i3} r_{i0}^2) \right] \right\} \\ y_{ik} \left\{ 1 + \hat{a}_{ik} \left[a_{i1} (2x_{ik}^2 - y_{ik}^2 - z_{ik}^2) - (a_{i2} r_{ik}^2 + a_{i3} r_{i0}^2) \right] \right\} \\ z_{ik} \left\{ 1 + \hat{a}_{ik} \left[a_{i1} (2x_{ik}^2 - y_{ik}^2 - z_{ik}^2) - (a_{i2} r_{ik}^2 + a_{i3} r_{i0}^2) \right] \right\} \end{pmatrix} = \mathbf{r}_{ik}(x_{ik}, y_{ik}, z_{ik}). \quad (7)$$

Точки пересечения деформированной поверхности с осями $O_i X_{ik}, O_i Y_{ik}, O_i Z_{ik}$ даются формулами (8) соответственно:

$$\mathbf{r}_{ike}(\pm r_{i0}, 0, 0) = (\pm r_{i0} (1 - 2\beta_{ik} r_{i0}^2 a_{i2}), 0, 0)^T, \mathbf{r}_{ike}(0, \pm r_{i0}, 0) = (0, \pm r_{i0} (1 + \beta_{ik} r_{i0}^2 a_{i2}), 0)^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_{ike}(0, 0, \pm r_{i0}) = (0, 0, \pm r_{i0} (1 + \beta_{ik} r_{i0}^2 a_{i2}))^T.$$

Мы обозначим (9):

$$a_{ik} = r_{i0} (1 - 2\beta_{ik} r_{i0}^2 a_{i2}), \quad b_{ik} = c_{ik} = r_{i0} (1 + \beta_{ik} r_{i0}^2 a_{i2}). \quad (9)$$

Точка P_{ike} с координатами $x_{ike}, y_{ike}, z_{ike}$ (11) принадлежит деформированной поверхности, если прообраз $P_{ik} = (x_{ik}, y_{ik}, z_{ik})$ (10) принадлежит недеформированной поверхности и удовлетворяет соотношению

$$x_{ik}^2 + y_{ik}^2 + z_{ik}^2 = r_{ik}^2 = r_{i0}^2. \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} x_{ike} \\ y_{ike} \\ z_{ike} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ik} \left\{ 1 + \beta_{ik} \left[3a_{i1}x_{ik}^2 + r_{i0}^2 a_{i1} (1 + 2\nu_i) \right] \right\} \\ y_{ik} \left[1 + \beta_{ik} \left(3a_{i1}x_{ik}^2 + r_{i0}^2 a_{i2} \right) \right] \\ z_{ik} \left[1 + \beta_{ik} \left(3a_{i1}x_{ik}^2 + r_{i0}^2 a_{i2} \right) \right] \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Пусть соотношения (10)-(11) выполнены. Мы можем доказать, что поверхность деформированного тела является эллипсоидом вращения вокруг оси $O_i X_{ik}$ с полуосями a_{ik} и $b_{ik} = c_{ik}$ (12):

$$\frac{x_{ike}^2}{a_{ik}^2} + \frac{y_{ike}^2 + z_{ike}^2}{b_{ik}^2} = 1. \quad (12)$$

Здесь a_{ik} – большая полуось. Следует заметить, что безразмерный член $\beta_{ik} r_{i0}^2 \approx 10^{-8}$, если i -е тело Земля, а k -е тело Луна. В доказательстве равенства (12) мы пренебрегаем членами более высокого порядка малости чем $\beta_{ik} r_{i0}^2$ и удерживаем члены только первого порядка малости. Мы подставляем соотношение (11) в (12) и упрощаем левую часть уравнения (12). Качественная картина упругих деформаций поверхности тела (эллипсоид (12)) с перемещениями, пропорциональными реальным размерам, представлена на рисунке 1.

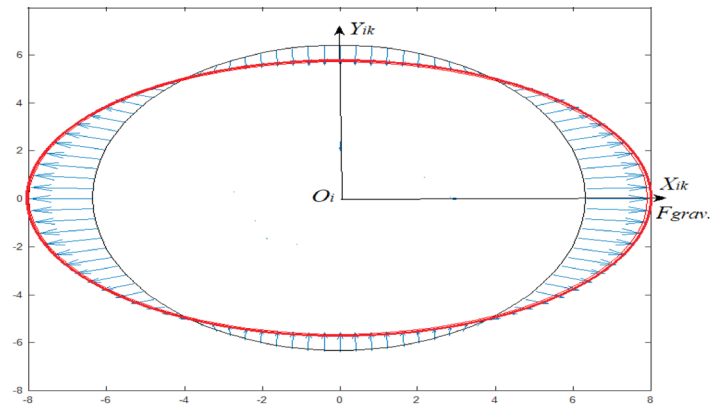


Рис. 1. Качественная картина деформаций упругого тела в сечении $O_i X_{ik} Y_{ik}$

Голубые стрелки показывают перемещения точек (они увеличены во много раз) от поверхности недеформированного тела (черная окружность) к поверхности деформированного тела (красный эллипс). Ось $O_i X_{ik}$ и сила гравитации F_{grav} направлены от i -го тела к k -ому телу.

2. Форма поверхности вязкого тела

В формуле (1) вязкоупругие перемещения представлены, в первом приближении, в виде суммы упругих \mathbf{u}_{ik12} и вязких \mathbf{u}_{ik13} перемещений. Фактически, вязкие перемещения не могут существовать отдельно от упругих перемещений. Но, так как они даны отдельно в выражении (1), то интересно посмотреть, какую форму примет тело под действием вязких перемещений и как они повлияют на упругие перемещения. Вязкие перемещения \mathbf{u}_{ik13} (13) в системе координат $O_i X_i Y_i Z_i$ имеют вид:

$$\mathbf{u}_{ik13}(\mathbf{r}_i, \psi_{ki}(t)) = c_{ik} \left[a_{i1} \left(\frac{d\mathbf{B}_{ki}}{d\psi_{ki}} \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i \right) \mathbf{r}_i + (a_{i2} \mathbf{r}_i^2 + a_{i3} r_{i0}^2) \frac{d\mathbf{B}_{ki}}{d\psi_{ki}} \mathbf{r}_i \right],$$

$$c_{ik} = -3\rho_i E_i^{-1} f_{ki} R_k^{-3} \chi_i (\omega_k - \omega_{2+i}). \quad (13)$$

Здесь χ_i – временная задержка деформации, ω_1 – орбитальная угловая скорость движения центра масс двух тел C по отношению к точке O массивному притягивающему центру, ω_2 – орбитальная угловая скорость движения тел относительно их центра масс C , ω_{2+i} – угловая скорость вращения i -го тела относительно оси $O_i Z_i$. Мы можем доказать, что в системе координат $O_i X_{ik} Y_{ik} Z_{ik}$ поверхность тела, деформированная вязкими перемещениями, имеет каноническое уравнение трёхосного эллипсоида. Система $O_i X_{ik} Y_{ik} Z_{ik}$ образована вращением системы $O_i X_i Y_i Z_i$ относительно оси $O_i Z_i$ на угол $\bar{\psi}_{ki}(t) = (\psi_{ki}(t) + \pi/4)$. Преобразование координат $\bar{\mathbf{r}}_{ik} = (\bar{x}_{ik}, \bar{y}_{ik}, \bar{z}_{ik})^T$ в системе $O_i X_{ik} Y_{ik} Z_{ik}$ к координатам $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ в системе $O_i X_i Y_i Z_i$ даётся формулами (14):

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}_{ik}(\bar{\psi}_{ik}) \bar{\mathbf{r}}_{ik} = \mathbf{\Gamma}_{ik}(\bar{\psi}_{ik}) \begin{pmatrix} \bar{x}_{ik} \\ \bar{y}_{ik} \\ \bar{z}_{ik} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_{ik}(\bar{\psi}_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos(\bar{\psi}_{ik}) & -\sin(\bar{\psi}_{ik}) & 0 \\ \sin(\bar{\psi}_{ik}) & \cos(\bar{\psi}_{ik}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Преобразование вязких перемещений имеет вид (15):

$$\mathbf{u}_{ik13}(\bar{\mathbf{r}}_{ik}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ikv} \\ \mathbf{v}_{ikv} \\ \mathbf{w}_{ikv} \end{pmatrix} = (\mathbf{\Gamma}_{ik}(\bar{\psi}_{ik}))^{-1} \mathbf{u}_{ik13}(\mathbf{\Gamma}_{ik}(\bar{\psi}_{ik})\bar{\mathbf{r}}_{ik}, \bar{\psi}_{ik}(t)) =$$

$$c_{ik} \begin{bmatrix} a_{i1}(x_{ikv}^2 - y_{ikv}^2) + (a_{i2}r_{ikv}^2 + a_{i3}r_{i0}^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}_{ik}. \quad (15)$$

Произвольная точка недеформированного тела, позиционируемая вектором \mathbf{r}_i , переходит в точку с радиусом-вектором \mathbf{r}_{ikv} (16) в системе $O_i\bar{X}_{ik}\bar{Y}_{ik}\bar{Z}_{ik}$ вследствие вязких деформаций:

$$\mathbf{r}_{ikv} = \begin{pmatrix} x_{ikv} \\ y_{ikv} \\ z_{ikv} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{r}}_{ik} + \mathbf{u}_{ik13}(\bar{\mathbf{r}}_{ik}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_{ik} \\ \bar{y}_{ik} \\ \bar{z}_{ik} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ikv} \\ \mathbf{v}_{ikv} \\ \mathbf{w}_{ikv} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_{ik} \left\{ 1 + c_{ik} \left[a_{i1}(\bar{x}_{ik}^2 - \bar{y}_{ik}^2) + (a_{i2}\bar{r}_{ik}^2 + a_{i3}r_{i0}^2) \right] \right\} \\ \bar{y}_{ik} \left\{ 1 + c_{ik} \left[a_{i1}(\bar{x}_{ik}^2 - \bar{y}_{ik}^2) - (a_{i2}r_{ik}^2 + a_{i3}r_{i0}^2) \right] \right\} \\ \bar{z}_{ik} \left\{ 1 + c_{ik} \left[a_{i1}(\bar{x}_{ik}^2 - \bar{y}_{ik}^2) \right] \right\} \end{pmatrix} = \mathbf{r}_{ikv}(\bar{x}_{ik}, \bar{y}_{ik}, \bar{z}_{ik}) \quad (16)$$

Укажем точки пересечения деформированной поверхности с осями $O_i\bar{X}_{ik}$, $O_i\bar{Y}_{ik}$, $O_i\bar{Z}_{ik}$ соответственно (17):

$$\mathbf{r}_{ikv}(\pm r_{i0}, 0, 0) = (\pm r_{i0}(1 - c_{ik}r_{i0}^2a_{i2}), 0, 0)^T, \quad \mathbf{r}_{ikv}(0, \pm r_{i0}, 0) = (0, \pm r_{i0}(1 + c_{ik}r_{i0}^2a_{i2}), 0)^T,$$

$$\mathbf{r}_{ikv}(0, 0, \pm r_{i0}) = (0, 0, \pm r_{i0})^T. \quad (17)$$

Обозначим (18):

$$\bar{a}_{ik} = r_{i0}(1 - c_{ik}r_{i0}^2a_{i2}), \quad \bar{b}_{ik} = r_{i0}(1 + c_{ik}r_{i0}^2a_{i2}), \quad \bar{c}_{ik} = r_{i0}. \quad (18)$$

Точки с координатами $x_{ikv}, y_{ikv}, z_{ikv}$ принадлежат деформированной поверхности, если точки в (16) с координатами $\bar{x}_{ik}, \bar{y}_{ik}, \bar{z}_{ik}$ принадлежат недеформированной поверхности и удовлетворяют соотношению (19):

$$\bar{x}_{ik}^2 + \bar{y}_{ik}^2 + \bar{z}_{ik}^2 = r_{i0}^2. \quad (19)$$

Каноническое уравнение деформированной поверхности описывает трёхосный эллипсоид (20) с большой полуосью \bar{a}_{ik} и полуосями b_{ik}, c_{ik} :

$$\frac{x_{ikv}^2}{a_{ik}^2} + \frac{y_{ikv}^2}{b_{ik}^2} + \frac{z_{ikv}^2}{c_{ik}^2} = 1. \quad (20)$$

Эта формула может быть доказана с точностью до членов первого порядка малости относительно безразмерной величины $c_{ik}r_{i0}^2$. Следует заметить, что вязкие перемещения в несколько раз меньше упругих перемещений. Качественная картина вязких деформаций тела с перемещениями, пропорциональными реальным размерам, представлена на рисунке 2.

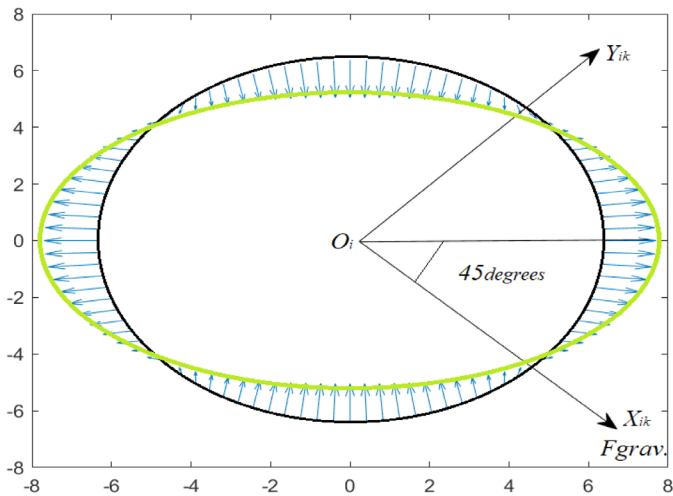


Рис. 2. Качественная картина деформаций вязкого тела в сечении $O_i X_{ik} Y_{ik}$

Голубые стрелки показывают перемещения (они увеличены во много раз) от поверхности недеформированного тела (черная окружность) к поверхности деформированного тела (зелёный эллипс). Большая полуось зелёного эллипса совпадает с осью $O_i \bar{X}_{ik}$ и образует угол в 45 градусов с осью $O_i X_{ik}$.

3. Форма поверхности вязкоупругого тела

Преобразуем вязкоупругие перемещения (1) в системе координат $O_i X_i Y_i Z_i$ (21)-(23):

$$\mathbf{u}_{ik1} = 3\rho_i E_i^{-1} f_{ki} R_k^{-3} \left[a_{i1} (\tilde{\mathbf{B}}_{ki} \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i + (a_{i2} r_i^2 + a_{i3} r_{i0}^2) \tilde{\mathbf{B}}_{ki} \mathbf{r}_i \right], \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{ki} = \mathbf{B}_{ki} - \frac{1}{2} \tan 2\alpha_{ki} \frac{d\mathbf{B}_{ki}}{d\psi_{ki}} = \frac{1}{6 \cos 2\alpha_{ki}} \begin{pmatrix} 3 \cos 2\tilde{\psi}_{ki} + \cos 2\alpha_{ki} & 3 \sin 2\tilde{\psi}_{ki} & 0 \\ 3 \sin 2\tilde{\psi}_{ki} & -3 \cos 2\tilde{\psi}_{ki} + \cos 2\alpha_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cos 2\alpha_{ki} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\tilde{\psi}_{ki}(t) = \psi_{ki}(t) - \alpha_{ki}(t), \quad \tan 2\alpha_{ki}(t) = 2\chi_i(\omega_k(t) - \omega_{2+i}(t)). \quad (23)$$

Выражение (21) совпадает по форме с выражением (2), отличаюсь только матрицами $\tilde{\mathbf{B}}_{ki}$ and \mathbf{B}_{ki} . Поэтому мы совершим последовательно те же самые шаги:

1. преобразование координат $\tilde{\mathbf{r}}_{ik} = (\tilde{x}_{ik}, \tilde{y}_{ik}, \tilde{z}_{ik})^T$ к координатам $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ (24) и перемещений \mathbf{u}_{ik1} (25), (26) от системы координат $O_i \tilde{X}_{ik} \tilde{Y}_{ik} \tilde{Z}_{ik}$ к системе $O_i X_i Y_i Z_i$ (система $O_i \tilde{X}_{ik} \tilde{Y}_{ik} \tilde{Z}_{ik}$ образована вращением $O_i X_i Y_i Z_i$ вокруг оси $O_i Z_i$ на угол $\tilde{\psi}_{ki}(t)$);

2. преобразование произвольной точки недеформированного тела, определяемого вектором \mathbf{r}_i к вектору $\mathbf{r}_{ik\ ev}$ (27) в системе $O_i \tilde{X}_{ik} \tilde{Y}_{ik} \tilde{Z}_{ik}$ в силу вязкоупругих деформаций;

3. определение точек пересечения деформированной поверхности с осями $O_i \tilde{X}_{ik}, O_i \tilde{Y}_{ik}, O_i \tilde{Z}_{ik}$ (28), большой полуоси \tilde{a}_{ik} и полуосей $\tilde{b}_{ik}, \tilde{c}_{ik}$ (29).

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}_{ik}(\tilde{\psi}_{ik}) \tilde{\mathbf{r}}_{ik} = \mathbf{\Gamma}_{ik}(\tilde{\psi}_{ik}) \begin{pmatrix} \tilde{x}_{ik} \\ \tilde{y}_{ik} \\ \tilde{z}_{ik} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_{ik}(\tilde{\psi}_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\psi}_{ik}) & -\sin(\tilde{\psi}_{ik}) & 0 \\ \sin(\tilde{\psi}_{ik}) & \cos(\tilde{\psi}_{ik}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

$$\mathbf{u}_{ik1}(\tilde{\mathbf{r}}_{ik}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ik\ ve} \\ \mathbf{v}_{ik\ ve} \\ \mathbf{w}_{ik\ ve} \end{pmatrix} = (\mathbf{\Gamma}_{ik}(\tilde{\psi}_{ik}))^{-1} \mathbf{u}_{ik1}(\mathbf{\Gamma}_{ik}(\tilde{\psi}_{ik}) \tilde{\mathbf{r}}_{ik}, \tilde{\psi}_{ik}(t)),$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{ik} \tilde{x}_{ik} [a_{i1} M_{ki} + A_i (3 + \cos 2\alpha_{ki})] \\ \gamma_{ik} \tilde{y}_{ik} [a_{i1} M_{ki} - A_i (3 - \cos 2\alpha_{ki})] \\ \gamma_{ik} \tilde{z}_{ik} (a_{i1} M_{ki} - 2A_i \cos 2\alpha_{ki}) \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$M_{ki} = (3 + \cos 2\alpha_{ki}) \tilde{x}_{ik}^2 - (3 - \cos 2\alpha_{ki}) \tilde{y}_{ik}^2 - 2 \cos 2\alpha_{ki} \tilde{z}_{ik}^2,$$

$$A_i = a_{i2} r_i^2 + a_{i3} r_{i0}^2, \quad \gamma_{ik} = \beta_{ik} / (2 \cos 2\alpha_{ki}) \quad (26)$$

$$\mathbf{r}_{ik\ ve} = \begin{pmatrix} x_{ik\ ve} \\ y_{ik\ ve} \\ z_{ik\ ve} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{r}}_{ik} + \mathbf{u}_{ik1}(\tilde{\mathbf{r}}_{ik}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{ik} \\ \tilde{y}_{ik} \\ \tilde{z}_{ik} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ik\ ve} \\ \mathbf{v}_{ik\ ve} \\ \mathbf{w}_{ik\ ve} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{ik} \left\{ 1 + \gamma_{ik} \left[a_{i1} M_{ki} + A_i (3 + \cos 2\alpha_{ki}) \right] \right\} \\ \tilde{y}_{ik} \left\{ 1 + \gamma_{ik} \left[a_{i1} M_{ki} - A_i (3 - \cos 2\alpha_{ki}) \right] \right\} \\ \tilde{z}_{ik} \left[1 + \gamma_{ik} (a_{i1} M_{ki} - 2A_i \cos 2\alpha_{ki}) \right] \end{pmatrix} = \mathbf{r}_{ikve} (\tilde{x}_{ik}, \tilde{y}_{ik}, \tilde{z}_{ik}). \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ikve} (\pm r_{i0}, 0, 0) &= (\pm r_{i0} (1 - \gamma_{ik} r_{i0}^2 a_{i2} (3 + \cos 2\alpha_{ki})), 0, 0)^T. \\ \mathbf{r}_{ikve} (0, \pm r_{i0}, 0) &= (0, \pm r_{i0} (1 + \gamma_{ik} r_{i0}^2 a_{i2} (3 - \cos 2\alpha_{ki})), 0)^T. \\ \mathbf{r}_{ikve} (0, 0, \pm r_{i0}) &= (0, 0, \pm r_{i0} (1 + 2\gamma_{ik} r_{i0}^2 a_{i2} \cos 2\alpha_{ki})). \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ik} &= r_{i0} (1 - \gamma_{ik} r_{i0}^2 a_{i2} (3 + \cos 2\alpha_{ki})), \quad \tilde{b}_{ik} = r_{i0} (1 + \gamma_{ik} r_{i0}^2 a_{i2} (3 - \cos 2\alpha_{ki})), \\ \tilde{c}_{ik} &= r_{i0} (1 + 2\gamma_{ik} r_{i0}^2 a_{i2} \cos 2\alpha_{ki}), \end{aligned} \quad (29)$$

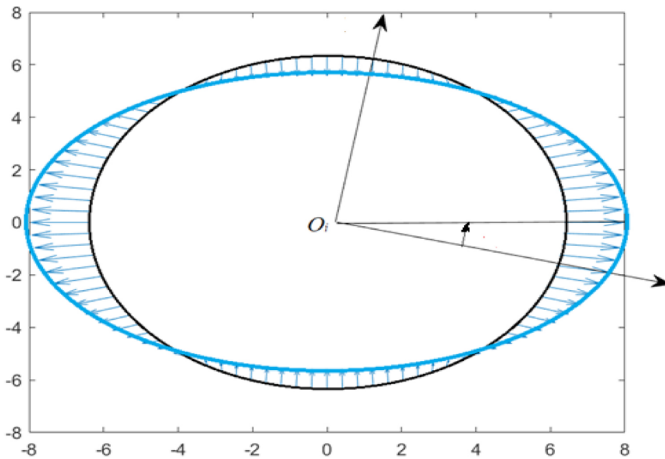


Рис. 3. Качественная картина деформаций вязкоупругого тела в сечении $O_i X_{ik} Y_{ik}$

Точки с координатами $\tilde{x}_{ikve}, \tilde{y}_{ikve}, \tilde{z}_{ikve}$ принадлежат деформированной поверхности и удовлетворяют каноническому уравнению трёхосного эллипсоида (30), если точки в (27) с координатами $\tilde{x}_{ik}, \tilde{y}_{ik}, \tilde{z}_{ik}$ принадлежат недеформированной поверхности и удовлетворяют уравнению (31).

$$\frac{\tilde{x}_{ikve}^2}{\tilde{a}_{ik}^2} + \frac{\tilde{y}_{ikve}^2}{\tilde{b}_{ik}^2} + \frac{\tilde{z}_{ikve}^2}{\tilde{c}_{ik}^2} = 1. \quad (30)$$

$$\tilde{x}_{ik}^2 + \tilde{y}_{ik}^2 + \tilde{z}_{ik}^2 = r_{i0}^2. \quad (31)$$

Уравнение (30) может быть доказано с точностью до членов первого порядка малости относительно безразмерной величины $\gamma_{ik} J_{i0}^2$. Качественная картина вязкоупругих деформаций с перемещениями, пропорциональными реальным размерам, представлена на рисунке 3.

Голубые стрелки показывают перемещения (они увеличены во много раз) от поверхности недеформированного тела (черная окружность) к деформируемому телу (голубой эллипс). Большая полуось \tilde{a}_{ik} голубого эллипса совпадает с осью $O_i \tilde{X}_{ik}$ и образует угол $(-\alpha_{ki})$ с осью $O_i X_{ik}$.

Заключение

Мы нашли такие системы координат, в которых уравнения поверхностей тел имеют каноническую форму. При упругих деформациях поверхность тела представляет собой эллипсоид вращения, вытянутый вдоль оси симметрии и направленной к центру притягивающего тела. При вязких деформациях поверхность тела представляет собой трёхосный эллипсоид, большая полуось которого образует угол в 45 градусов с направлением на центр притягивающего тела. При совместном действии этих деформаций (вязкоупругих) поверхность тела представляет собой трёхосный эллипсоид. Его большая полуось образует угол $(-\alpha_{ki})$ (23) с направлением на центр притягивающего тела. Величина этого угла зависит от коэффициента временной задержки деформации, угловой скорости вращения тела, орбитальной угловой скорости притягивающего тела. В терминологии приливов угол $(-\alpha_{ki})$ означает *угол запаздывания*. Для Земли, когда притягивающим телом является Луна, угол запаздывания равен 2.52° . Но влияние этого угла на эволюцию небесного тела является существенным.

Ляв [1] рассматривал несжимаемое тело с единственным параметром – модулем сдвига, поверхность которого аппроксимируется второй зональной гармоникой. Эта модель небесного тела, деформируемого приливами, до сих пор используется в классической учебной литературе [2]. Угол запаздывания находится из на-

блюдений. В нашей работе используется более совершенная модель для описания деформированного состояния небесных тел и найдена форма этих тел с учетом их вязкоупругости, а также угол запаздывания.

Список литературы / References

1. Love A E H (1944) A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity 4th ed. (Dover, New York) p 670
2. Murray C D Dermott S F (1999) Solar System Dynamics (Cambridge University Press) p 606
3. Zlenko A (2019) The Perturbing Potential and the Torques in one Three-Body Problem J. Phys.: Conf. Ser. **1301** 012022. doi:10.1088/1742-6596/1301/1/012006
4. Zlenko A (2020) Displacements of Points of a Viscoelastic Ball Caused by Tides. J. Phys.: Conf. Ser. **1705** 012026
5. Zlenko A (2020) Deformed state of viscoelastic bodies in one problem of tidal interaction. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. **868** 012022